OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA - PANAMÁ
MINISTERIO DE EDUCACIÓN - UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
TERCERA RONDA, XII NIVEL, 2024
PRUEBA TEÓRICA

Indicaciones generales. No se admiten preguntas durante la prueba, no debe conversar ni mirar la hoja del compañero. El desarrollo de cada una de las situaciones se debe presentar de forma clara, ordenada y secuencial, siendo evidente el número de situación y la cuestión que se responde. Evite los borrones y tachones. Póngale nombre a su prueba.

Situación 1. En el corazón de nuestra galaxia, la Vía Láctea, reside un coloso gravitacional conocido como Sagitario A* (Sgr A*), un agujero negro supermasivo con una masa estimada en $4 \times 10^6\, M_\odot$, (donde $M_\odot$ es la masa del Sol que es $1{,}989 \times 10^{30}\, kg$). Orbitando en torno a este titán cósmico, encontramos a S2, una estrella que ha capturado la atención de los astrónomos debido a su movimiento en una órbita elíptica extremada alrededor de Sgr A*. S2 completa su órbita en un período de 15 años, moviéndose desde una distancia mínima de 120 unidades astronómicas (AU, donde 1 AU = $1{,}496\times 10^8\, km$) en su punto más cercano al agujero negro (periastro), hasta una distancia máxima de 1 800 AU en su punto más alejado (apoastro). Para cada una de las siguientes situaciones debe mostrar sus resultados en unidades del sistema internacional de medida.

1. En la primera parte de este problema, se les solicita determinar dos parámetros clave de la órbita de S2: **el semieje mayor a**, que describe el tamaño promedio de la órbita elíptica, y **la excentricidad e**, que mide cuán alargada es esta órbita. Estos parámetros se pueden calcular directamente a partir de las distancias mínima y máxima de S2 a Sagitario A*.
2. En la segunda parte del problema, el enfoque se dirige a las rapideces orbitales de S2. Se debe calcular, con elementos y conceptos de conservación de energía, la **rapidez de S2 en su periastro**, el punto de máxima aceleración y la **rapidez en su apoastro**. Además, a partir de la conservación del momento angular demuestre como podría relacionar la **rapidez en su apoastro** o la **rapidez de S2 en su periastro.** A partir de la ecuación que relaciona la rapidez del astro en su trayectoria y la distancia al centro del agujero negro, **deduzca las unidades de la constante de gravitación universal.**

Contexto

Para resolver el problema de los parámetros orbitales, es importante recordar que el semieje mayor de una órbita elíptica es el promedio de las distancias máxima y mínima de la órbita al foco (que en este caso es el agujero negro Sagitario A*). Así, al conocer las distancias mínima y máxima de la estrella S2 a Sagitario A*, se puede determinar el valor del semieje mayor a utilizando esta definición geométrica de la elipse.

En cuanto a la excentricidad de la órbita, esta mide cuán alargada es la elipse comparada con un círculo perfecto. Un círculo tiene una excentricidad de cero, mientras que una elipse más alargada tendrá una excentricidad más cercana a uno. La excentricidad de la órbita de S2 se puede calcular directamente utilizando las distancias mínima y máxima, R_{min} y R_{max} respectivamente, de la estrella a Sagitario A*. Estas distancias están relacionadas con la excentricidad a través de las fórmulas para R_{min} y R_{max}, que incluyen el semieje mayor y la excentricidad.

$$R_{\text{max}} = a(1+e)$$
$$R_{\text{min}} = a(1-e)$$

Al tomar la diferencia de estas distancias, es posible aislar el parámetro de excentricidad.

En una órbita elíptica, la velocidad de una estrella no es constante; varía dependiendo de su distancia al cuerpo masivo que está en el foco de la órbita. En el periastro, la estrella se encuentra en su punto más cercano al foco, donde la atracción gravitatoria es mayor, lo que resulta en la rapidez más alta de toda la órbita. Para obtener la rapidez en el periastro, uno de los caminos posibles a tomar es aplicar el principio de conservación de la energía, que nos dice que la energía total en cualquier punto de la órbita, incluyendo el periastro, debe ser igual a la energía total (considerando la cinética y la potencial gravitatoria). Ahora, en una órbita elíptica, la energía total es constante y se puede expresar también en función del semieje mayor como $E = -\frac{GMm}{2a}$ (el valor de la constante de gravitación universal lo tomaremos como $G = 6{,}674\, x10^{-11}\, {m^3}/{kg\, s^2}$). De manera similar se puede llegar a la rapidez del apoastro.

El momento angular de la estrella es constante a lo largo de su órbita y se relaciona con la rapidez y la distancia radial.

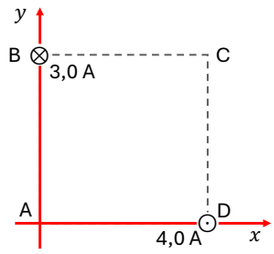
$$L = mvr$$

En el periastro, esta relación se puede usar para expresar la rapidez de la estrella en función de R_{min} y otros parámetros conocidos.

$$L = mv_{\text{min}}R_{\text{min}}$$

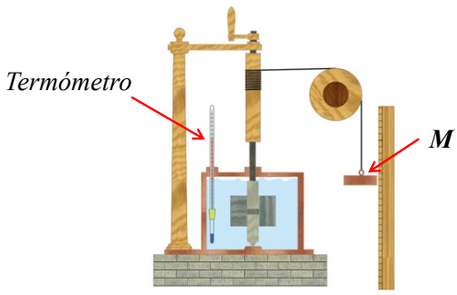
En el apoastro esta relación tendrá una forma equivalente.

Situación 2. Dos hilos conductores largos y paralelos, por los que circulan corrientes de 3,0 A y 4,0 A, pasan por los vértices B y D de un cuadrado de 2,0 m de arista, situado en un plano perpendicular a los hilos, tal y como se ilustra en la figura de la derecha. El sentido en el que circulan las corrientes por los alambres se indica por los símbolos ⊗ = entra en el papel, ⊙ = sale del papel. A partir de esta información, responda las siguientes cuestiones:



a) ¿Cuál es la magnitud y dirección del vector campo magnético generado por las corrientes en los hilos conductores en el vértice A? (Desprecie los efectos del campo magnético terrestre).
b) Para la configuración propuesta: 1) ¿existe algún punto dentro del cuadrado en el que el campo magnético sea nulo? 2) De existir, ¿dónde queda ubicado? 3) En caso de no existir tal punto, ¿cómo se debería modificar la configuración del sistema para que existiese dicho punto y dónde se encontraría?
c) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza por unidad de longitud que cada hilo ejerce sobre el otro?
d) Un electrón que viaja por el punto A en la dirección positiva del eje ***y*** (hacia arriba en la figura), tiene, en ese instante, una energía cinética de 1,0 eV. Bajo estas condiciones: 1) Elabore una representación de los vectores campo magnético ($\vec{B}$), velocidad ($\vec{v}$) y fuerza magnética ($\vec{F}_m$) que actúa sobre el electrón en el punto A. 2) Determine la magnitud y direccion de la aceleración que experimenta en ese instante.
Datos: $\mu_0 = 4\pi \text{ x } 10^{-7} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-2}$; $\text{m}_\text{e} = 9{,}1 \text{ x } 10^{-31}\text{kg}$; $\text{m}_\text{e} = 1{,}7 \text{ x } 10^{-27}\text{kg}$; $\text{q}_\text{e} = 1{,}6 \text{ x } 10^{-19}\text{C}$.

Situación 3. En el siglo XIX, James P. Joule ideó un experimento para demostrar que el calor no era más que una forma de energía, y que se podía obtener a partir de la energía mecánica. Dicho experimento se conoce como experimento de Joule para determinar el equivalente mecánico del calor. Con su experimento, Joule se propuso demostrar que se podía elevar la temperatura del agua transfiriéndole energía mecánica.
Supongamos que realizamos el experimento, para tal fin utilizamos un recipiente aislado térmicamente que contiene una masa de agua, con un termómetro para medir su temperatura, y un eje con unas paletas que se ponen en movimiento por la acción de una masa ***M*** (Montaje experimental de James P. Joule). La masa M cae y pierde energía potencial. Como consecuencia, el agua agitada por las paletas se calienta. En la imagen se muestra el montaje experimental utilizado por James P. Joule



En el experimento, la masa de agua en el recipiente es de 100,0 g, inicialmente a 20,0 °C, y una masa ***M*** **=** 50,0 kg. Medimos la temperatura que va alcanzando el agua a medida que la masa desciende distintas alturas y lo registramos en la tabla 1.

Tabla	
Altura (cm)	**T (ºC)**
14,0	20,2
33,0	20,4
60,0	20,7
82,0	21,0
100,0	21,2

a) Gráfique el incremento de temperatura en función de la altura. Utilizando el método de mínimos cuadrados obtenga la ecuación particular.
b) Con la pendiente anterior calcule la relación entre la unidad de energía (J) y la unidad de calor (caloría), sabiendo que el calor específico del agua es 1 cal/g °C. ¿Qué error experimental hemos cometido (considere como valor exacto: 1 cal = 4,187 J)?
c) Supongamos que sólo disponemos de una masa de 1,0 kg y de una altura para dejar caer la masa de 1,0 m. Pero queremos aumentar 1,0 °C la temperatura de la masa anterior de agua (100 g), ¿Cómo harías el experimento?

Información: para calcular la pendiente (m) y el intercepto (b) de una función lineal $(y = mx + b)$ utilizando el método de mínimos cuadrados utilice las siguientes ecuaciones:

$$m = \frac{n\sum(xy) - \sum x \sum y}{n\sum(x^2) - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{\sum y - m\sum x}{n}$$